Obliczenia Naukowe,
Laboratorium, Lista 2

Jerzy Wroczyński

2020-11-08

1 Zadanie 1.

1.1 Opis problemu

Należy napisać program liczący iloczyn skalarny dwóch wektorów przy pomocy czterech metod w dwóch arytmetykach (`Float32` oraz `Float64`).

Zgodnie z poleceniem zadania wektor x został nieco zmieniony.

$$x = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664\cancel{9}, 0.301029995\cancel{7}]$$
$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

1.2 Rozwiązanie

(kod źródłowy w pliku `ex-1.jl`)

Aby uruchomić program, należy wykonać polecenie `./ex-1.jl` — wyświetlą się instrukcje mówiące, jakie argumenty są przyjmowane przez program.

Wyniki: (l1 — wyniki z pierwszej listy; l2 — wyniki po zastosowanych zmianach wymienionych w poleceniu)

- `Float32`
  - metoda *„w przód”*
    - $= -0.2499443$ (l1)
    - $= -0.2499443$ (l2)
  - metoda *„w tył”*
    - $= -0.2043457$ (l1)
    - $= -0.2043457$ (l2)
  - od **największego** do *najmniejszego*
    - $= -0.25$ (l1)
    - $= -0.25$ (l2)
  - od *najmniejszego* do **największego**
    - $= -0.25$ (l1)
    - $= -0.25$ (l2)
- `Float64`
  - metoda *„w przód”*

    - $= 1.0251881368296672 \cdot 10^{-10}$ (l1)
    - $= -0.004296342739891585$ (l2)
  - metoda *„w tył”*
    - $= -1.5643308870494366 \cdot 10^{-10}$ (l1)
    - $= -0.004296342998713953$ (l2)
  - od **największego** do *najmniejszego*
    - $= 0$ (l1)
    - $= -0.004296342842280865$ (l2)
  - od *najmniejszego* do **największego**
    - $= 0$ (l1)
    - $= -0.004296342842280865$ (l2)

Faktyczna wartość wynosi $-1.00657107000000 \cdot 10^{-11}$.

W przypadku arytmetyki `Float32` nie widać żadnych różnic (za mała precyzja), ale w przypadku `Float64` zachodzą bardzo zauważalne różnice. Problem jest w uwarunkowaniu zadania — wartości, które sumujemy mają różne znaki.

2 Zadanie 2.

2.1 Opis problemu

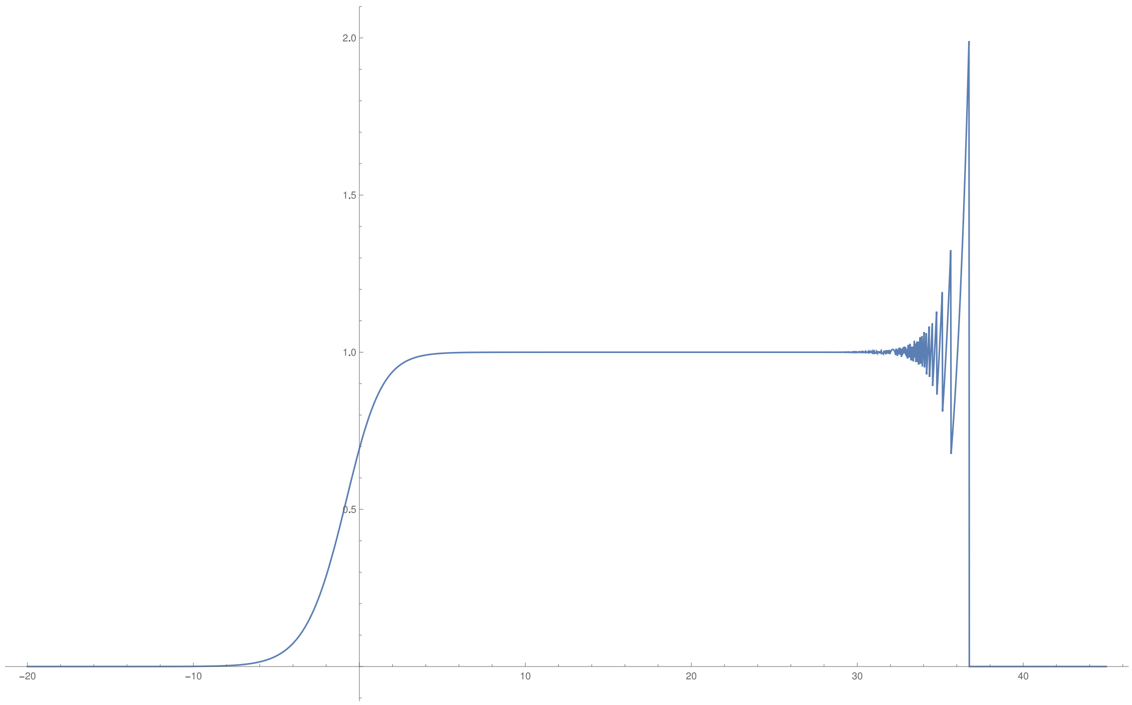
Należy obliczyć granicę funkcji $f(x) = e^x \cdot \ln(1 + e^{-x})$ oraz narysować wykres tej funkcji przy pomocy dwóch różnych programów.

2.2 Rozwiązanie

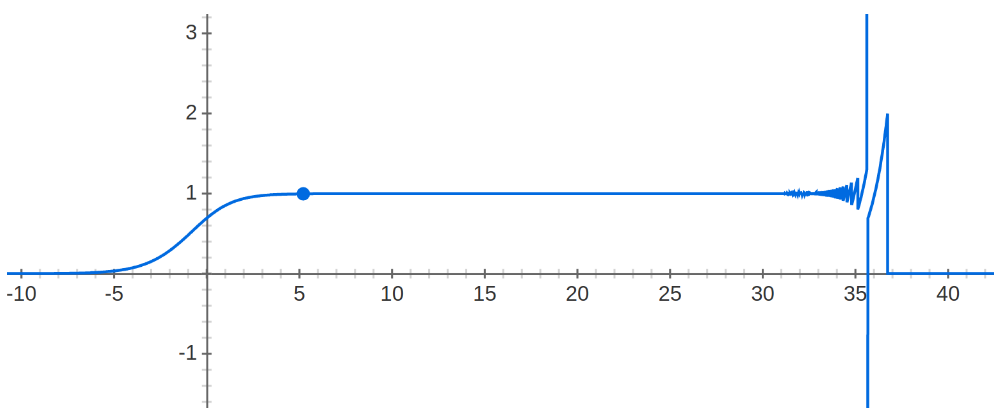
Liczymy granicę

$$e^x \cdot \ln(1+e^{-x}) = \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \xrightarrow{\text{z zasady de l'Hôpitala}} \frac{(ln(1+e^{-x}))'}{(e^{-x})'} = -\frac{1}{(e^x+1)\cdot(-e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$$

Poniżej znajdują się dwa wykresy funkcji f.



Rysunek 1: Wykres wykonany przy pomocy programu *Wolfram Mathematica*



Rysunek 2: Wykres wykonany przy pomocy *Kalkulatora Google*

Przy wartościach x około 30 widać pewne anomalie. Funkcja zaczyna być coraz bardziej niestabilna, aż w końcu osiąga stałe zero (niezgodne z obliczoną wartością granicy). Funkcję f możemy w zasadzie rozbić na dwie części — $g(x) = e^x$ oraz $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Otóż funkcja g dąży do nieskończoności, kiedy h dąży do zera. Po obliczeniu granicy dochodzimy do wniosku, że te dwie funkcje się nawzajem *anulują*. Przy czym to zjawisko *nullifikacji* ma swoje *granice* i właśnie w pewnym momencie niedokładna komputerowa symulacja liczb rzeczywistych nie jest w stanie dokładnie określić wartości funkcji f dalej niż $x = 30$. Zbliżając się do okolic epsilona maszynowego w przypadku e^{-x} powoduje brak precyzji.

3 Zadanie 3.

3.1 Opis problemu

Należy rozwiązać klasyczne zadanie z równaniem $Ax = b$ gdzie x to jest po prostu kolumna jedynek — należy sprawdzić jak daleki jest $\tilde{x}$ od tego prawdziwego x.

Używamy tutaj dwóch sposobów obliczenia rozwiązania:

- metoda Gaussa $\tilde{x} = \frac{b}{A}$ (`x = A\b`)
- metoda odwracania $\tilde{x} = A^{-1} \cdot b$ (`x = inv(A)*b`)

gdzie macierz A jest równa macierzy Hilberta H_n (generujemy funkcją `hilb` z pliku `hilb.jl`) oraz losowej macierzy stopnia n z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania c (generujemy funkcją `matcond` z pliku `matcond.jl`).

3.2 Rozwiązanie

W pliku `ex-3.jl` znajduje się program, który od razu wyświetla `rank` i `cond` macierzy oraz sam błąd względny $\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||}$ (sam $\tilde{x}$ nie jest tutaj istotny — to właśnie odchylenie daje nam lepszy obraz eksperymentu).

Uruchamiając program `./ex-3.jl`, otrzymujemy wyniki:

H_n:

n	cond(A)	rank(A)	błąd wzgl. dla metody Gaussa	błąd wzgl. dla metody odwracania
2	19.28147006790397	2	5.661048867003676e-16	1.4043333874306803e-15
3	524.0567775860644	3	8.022593772267726e-15	0.0
4	15513.738738928929	4	4.637277712035294e-13	7.542470546988852e-13
5	476607.25024224253	5	1.7697056701418277e-13	7.45602798259539e-12
6	1.495105864125091e7	6	3.496491467713994e-10	3.533151828962887e-10
7	4.7536735637688667e8	7	1.3175049864850338e-8	6.190844397992631e-9
8	1.5257575516147259e10	8	2.487433466002445e-7	3.775275483015941e-7
9	4.9315408927806335e11	9	9.643625435772316e-6	1.1659486044133412e-5
10	1.6024859712306152e13	10	0.00022035288727930986	0.0003357158826776558
11	5.2210348947688544e14	10	0.006022512934347414	0.01113776822564549
12	1.7255427417341868e16	11	0.19509235225028912	0.16218620232347905
13	7.126491965424366e17	11	7.894191771622431	5.511855154155295
14	6.101307732044041e17	11	0.8270688593203056	3.3522039875276723
15	4.223311222761075e17	12	3.10349386243609	4.354299435453685
16	3.535827507735838e17	12	9.083139658689422	54.189834405860445
17	3.1182808742153696e17	12	4.24328971542452	5.786281231941037
18	1.5639169583348145e18	12	4.7860299021083	5.7599951815224495
19	1.3274441976880407e18	13	6.114994252530053	12.309212980457932
20	2.2777635596453635e18	13	19.122235961045973	17.030822563878868
21	1.5088647979164173e18	13	5.528693844520417	4.797191888763164
22	2.148587035517758e18	13	14.91838193889066	19.452979830106727
23	8.53990580100839e18	13	7.050470984846638	6.265996982174681
24	1.1703742699502748e19	13	13.918474300172141	17.20261485961593

$R_{n,c}$:

n	c	cond(A)	rank(A)	błąd wzgl. dla metody Gaussa	błąd wzgl. dla metody odwracania
5	1e+00	1.0000000000000009	5	2.432376777795247e-16	3.020133145511626e-16
5	1e+01	10.00000000000001	5	2.808666774861361e-16	3.2934537262255424e-16
5	1e+03	999.9999999999625	5	2.155091315812095e-15	8.819392567223196e-15
5	1e+07	1.000000000597782e7	5	1.2695072075273714e-11	7.246795342064423e-11
5	1e+12	9.999577236831453e11	5	2.61448678555302e-5	2.7142046872630515e-5
5	1e+16	7.632188304652641e15	4	0.16386439281597212	0.1757356711742009
10	1e+00	1.0000000000000009	10	4.399061727369024e-16	3.877842313165343e-16
10	1e+01	10.000000000000018	10	5.832634613762131e-16	5.8642480410516815e-16
10	1e+03	1000.0000000000928	10	2.8737410463596867e-16	4.115918845120883e-15
10	1e+07	9.999999994255912e6	10	1.9146544830293982e-10	1.8872661558996739e-10
10	1e+12	9.999193348540984e11	10	1.663630929645135e-5	1.6206852559088136e-5
10	1e+16	7.088325096781827e15	9	0.3205557352494367	0.31199666495863776
20	1e+00	1.000000000000001	20	6.968805455576194e-16	4.902612130890297e-16
20	1e+01	10.000000000000009	20	2.808666774861361e-16	4.983652532311798e-16
20	1e+03	1000.0000000000205	20	1.362983598934605e-14	1.352468566725756e-14
20	1e+07	1.0000000004227174e7	20	4.6456186752677485e-10	4.92860205505884e-10
20	1e+12	1.0000619610869774e12	20	6.030058980748272e-5	5.565287205789903e-5
20	1e+16	1.2688847279844144e16	19	0.36480984951866946	0.3925693795667684

Jak widać, im większe są nasze macierze, tym błąd względny staje się coraz większy. Wynika to oczywiście ze złego uwarunkowania tych macierzy (parametr `cond(A)`). Najgorzej zachowuje się macierz Hilberta, co widać po błędach względnych dla większych n.

4 Zadanie 4.

4.1 Opis problemu

Należy obliczyć miejsca zerowe dla „złośliwego wielomianu" Wilkinsona, przy czym rozróżniamy dwa różne zapisy tego wielomianu:

- naturalny:

$$P(x) = x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} - 1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} + 11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} + 1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^{9} + 63030812099294896x^{8} - 311333643161390640x^{7} + 1206647803780373360x^{6} - 3599979517947607200x^{5} + 8037811822645051776x^{4} - 12870931245150988800x^{3} + 13803759753640704000x^{2} - 8752948036761600000x + 2432902008176640000 \quad (1)$$

- kanoniczny:

$$p(x) = (x-20)(x-19)(x-18)(x-17)(x-16)(x-15)(x-14)(x-13)(x-12)(x-11)(x-10)(x-9)(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1) \quad (2)$$

(Oczywiście forma p od razu zdradza wszystkie miejsca zerowe.)
Dla znalezionych pierwiastków wielomianu P należy obliczyć $|P(z_k)|$ oraz $|p(z_k)|$. Dodatkowo należy sprawdzić różnicę między dokładnymi miejscami zerowymi ($k \in \{1, \dots, 20\}$) a obliczonymi z_k.

Następnie powtórzyć eksperyment ze zmienionym współczynnikiem przy x^{19} z -210 na $-210 - 2^{-23}$.

4.2 Rozwiązanie

Po uruchomieniu programu `./ex-4.jl` otrzymujemy wyniki:

k	z_k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	0.9999999999996989	36352.0	36626.425482422805	3.0109248427834245e-13
2	2.0000000000283182	181760.0	181303.93367257662	2.8318236644508943e-11
3	2.9999999995920965	209408.0	290172.2858891686	4.0790348876384996e-10
4	3.9999999837375317	3.106816e6	2.0415372902750901e6	1.626246826091915e-8
5	5.000000665769791	2.4114688e7	2.0894625006962188e7	6.657697912970661e-7
6	5.999989245824773	1.20152064e8	1.1250484577562995e8	1.0754175226779239e-5
7	7.000102002793008	4.80398336e8	4.572908642730946e8	0.00010200279300764947
8	7.999355829607762	1.682691072e9	1.5556459377357383e9	0.0006441703922384079
9	9.002915294362053	4.465326592e9	4.687816175648389e9	0.002915294362052734
10	9.990413042481725	1.2707126784e10	1.2634601896949205e10	0.009586957518274986
11	11.025022932909318	3.5759895552e10	3.300128474498415e10	0.025022932909317674
12	11.953283253846857	7.216771584e10	7.388525665404988e10	0.04671674615314281
13	13.07431403244734	2.15723629056e11	1.8476215093144193e11	0.07431403244734014
14	13.914755591802127	3.65383250944e11	3.5514277528420844e11	0.08524440819787316
15	15.075493799699476	6.13987753472e11	8.423201558964254e11	0.07549379969947623
16	15.946286716607972	1.555027751936e12	1.570728736625802e12	0.05371328339202819
17	17.025427146237412	3.777623778304e12	3.3169782238892363e12	0.025427146237412046
18	17.99092135271648	7.199554861056e12	6.344853141791282e12	0.009078647283519814
19	19.00190981829944	1.0278376162816e13	1.228571736671966e13	0.0019098182994383706
20	19.999809291236637	2.7462952745472e13	2.318309535271638e13	0.00019070876336257925

Oraz po modyfikacji Wilkinsona (uruchomienie programu `./ex-4.jl b`):

k	z_k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	0.9999999999998357 + 0.0im	20496.0	19987.872313406835	1.6431300764452317e-13
2	2.0000000000550373 + 0.0im	339570.0	352369.4138087958	5.503730804434781e-11
3	2.99999999660342 + 0.0im	2.2777455e6	2.4162415582518433e6	3.3965799062229962e-9
4	4.000000089724362 + 0.0im	1.0488020625e7	1.1263702300292023e7	8.972436216225788e-8
5	4.99999857388791 + 0.0im	4.1239073125e7	4.475744423806908e7	1.4261120897529622e-6
6	6.000020476673031 + 0.0im	1.406328934140625e8	2.1421031658039317e8	2.0476673030955794e-5
7	6.99960207042242 + 0.0im	4.122812662421875e8	1.7846173427860644e9	0.00039792957757978087
8	8.007772029099446 + 0.0im	1.0307901272578125e9	1.8686972170009857e10	0.007772029099445632
9	8.915816367932559 + 0.0im	2.1574055781816406e9	1.3746309775142993e11	0.0841836320674414
10	10.095455630535774 - 0.6449328236240688im	9.384147605647182e9	1.490069535200058e12	0.6519586830380407
11	10.095455630535774 + 0.6449328236240688im	9.384147605647182e9	1.490069535200058e12	1.1109180272716561
12	11.793890586174369 - 1.6524771364075785im	3.0012060598372482e10	3.2962792355717145e13	1.665281290598479
13	11.793890586174369 + 1.6524771364075785im	3.0012060598372482e10	3.2962792355717145e13	2.0458202766784277
14	13.992406684487216 - 2.5188244257108443im	2.0030917431984006e11	9.546022365750216e14	2.518835871190904
15	13.992406684487216 + 2.5188244257108443im	2.0030917431984006e11	9.546022365750216e14	2.7128805312847097
16	16.73074487979267 - 2.812624896721978im	1.1583329328642004e12	2.742106076928478e16	2.9060018735375106
17	16.73074487979267 + 2.812624896721978im	1.1583329328642004e12	2.742106076928478e16	2.825483521349608
18	19.5024423688181 - 1.940331978642903im	5.867381806750561e12	4.2524858765203725e17	2.4540214463129764
19	19.5024423688181 + 1.940331978642903im	5.867381806750561e12	4.2524858765203725e17	2.0043294443099486
20	20.84691021519479 + 0.0im	9.550552334336e12	1.37437435599976e18	0.8469102151947894

gdzie „im” jest częścią urojoną.

Jak widać, błędy w obliczaniu miejsc zerowych wielomianu są bardzo znaczące. Przez to, że arytmetyka `Float64` w systemie dziesiętnym ma od 15 do 17 cyfr znaczących współczynniki wielomianu w postaci naturalnej są zapisane w niedokładny sposób. Generuje nam to dużo narastających błędów podczas obliczania pierwiastków funkcji. Błędy te mogą być jeszcze bardziej uwypuklone przez bardzo lekkie zmodyfikowanie jednego ze współczynników — wtedy możemy trafić nawet do liczb zespolonych.

Pokazaliśmy, że zadanie obliczenia miejsc zerowych tego wielomianu jest źle uwarunkowane.

5 Zadanie 5.

Rozważamy równanie rekurencyjne (model logistyczny, model wzrostu populacji)

$$p_{n+1} := p_n + r \cdot p_n \cdot (1 - p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1 - p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiąca procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

Przeprowadzamy następujące eksperymenty:

5.1 Pod-zadanie 5.1.

Należy przeprowadzić 40 iteracji wyrażenia 3 dla danych

- $p_0 = 0.01$
- $r = 3$

a następnie powtórzyć pierwsze 10 iteracji, obciąć wynik do trzech miejsc po przecinku i kontynuować obliczenia do 40 iteracji. Porównać otrzymane wyniki. (Używamy arytmetyki `Float32`)

5.1.1 Rozwiązanie

Po uruchomieniu programu `./ex-5.1.jl` otrzymujemy wyniki:

H

n	p_n	p'_n
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726	0.5450726
4	1.2889781	1.2889781
5	0.1715188	0.1715188
6	0.5978191	0.5978191
7	1.3191134	1.3191134
8	0.056273222	0.056273222
9	0.21559286	0.21559286
10	**0.7229306**	**0.722**
11	1.3238364	1.3241479
12	0.037716985	0.036488533
13	0.14660023	0.1419599
14	0.52192605	0.5073818
15	1.2704837	1.2572184
16	0.2395482	0.28707945
17	0.7860428	0.901074
18	1.2905813	1.168493
19	0.16552472	0.57784426
20	0.5799036	1.3096651
21	1.3107499	0.092992425
22	0.08880377	0.34602693
23	0.33155674	1.0249038
24	0.9964373	0.94833183
25	1.0070873	1.0953275
26	0.9856746	0.78208303
27	1.0280352	1.2933705
28	0.9415718	0.15506029
29	1.1066148	0.54811007
30	0.75267017	1.2911663
31	1.3111435	0.1633339
32	0.08728206	0.5733017
33	0.32627377	1.3071823
34	0.98573136	0.102552414
35	1.0279264	0.37865865
36	0.94180745	1.0844874
37	1.106226	0.8096107
38	0.7536962	1.2720344
39	1.3106109	0.23392308
40	0.089340806	0.7715323

Co było do przewidzenia — mamy zupełnie różne wyniki po 10 iteracji, w której wprowadziliśmy modyfikację obcięcia części wyniku.

5.2 Pod-zadanie 5.2.

Ponownie przeprowadzamy 40 iteracji tego samego wzoru, przy czym używamy tutaj dwóch różnych arytmetyk (`Float32` oraz `Float64`).

5.2.1 Rozwiązanie

Po uruchomieniu programu `./ex-5.2.jl` otrzymujemy wyniki:

n	p_n	p'_n
1	0.0397	0.039700000000000006
2	0.15407173	0.15407173000000005
3	0.5450726	0.5450726260444214
4	1.2889781	1.2889780011888008
5	0.1715188	0.17151914210917463
6	0.5978191	0.5978201201070967
7	1.3191134	1.3191137924137961
8	0.056273222	0.05627157764626167
9	0.21559286	0.21558683923264893
10	0.7229306	0.7229143011796237
11	1.3238364	1.3238419441684237
12	0.037716985	0.037695297254799254
13	0.14660023	0.14651838271381398
14	0.52192605	0.5216706214360409
15	1.2704837	1.2702617739357684
16	0.2395482	0.24035217277573784
17	0.7860428	0.788101190228897
18	1.2905813	1.2890943027949757
19	0.16552472	0.17108484668450918
20	0.5799036	0.5965293124428507
21	1.3107499	1.3185755879607823
22	0.08880377	0.05837760834476091
23	0.33155674	0.22328659791088076
24	0.9964373	0.7435756772236771
25	1.0070873	1.3155883456187583
26	0.9856746	0.07003529709132894
27	1.0280352	0.26542635984930363
28	0.9415718	0.8503519818886585
29	1.1066148	1.2321124482487258
30	0.75267017	0.3741465376064961
31	1.3111435	1.0766292556171968
32	0.08728206	0.8291253603162694
33	0.32627377	1.254154851906327
34	0.98573136	0.297906229944765
35	1.0279264	0.9253805542593504
36	0.94180745	1.132534706433374
37	1.106226	0.6822342419051102
38	0.7536962	1.3326062851369196
39	1.3106109	0.0029066069884153833
40	0.089340806	0.011601082861106218

Co było do przewidzenia — mamy zupełnie różne wyniki. Tym razem błąd powoli narasta już od samego początku.

5.3 Komentarz do zadań 5.1. oraz 5.2.

Eksperyment pokazany w dwóch różnych wariantach w powyższych pod-zadaniach pokazuje nam jak duży wpływ mają nawet najmniejsze odchylenia spowodowane np. tak jak tutaj niedokładnym przechowywaniem danych (precyzja arytmetyki bądź bardzo głębokie zaokrąglenie).

Warto też wspomnieć, że w książce H.-O.Peitgen, H.Jürgens, D.Saupe *Granice Chaosu, Fraktale (Część 1.)* przeprowadzono jeszcze jeden eksperyment — porównanie dwóch różnych ale jednak matematycznie równoważnych metod liczenia wyrazów ciągu p_n: $p + rp(1 - p)$ oraz $(1 + r)p - rp^2$. I tutaj też po niewielkiej liczbie iteracji generowane były zupełnie różne wyrazy ciągu.

Zatem, *chaos świata* zachodzi nawet w modelach, które są poprawne matematycznie.

6 Zadanie 6.

6.1 Opis problemu

Rozważamy równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} := x_n^2 + c \tag{4}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ gdzie c jest pewną daną stałą.

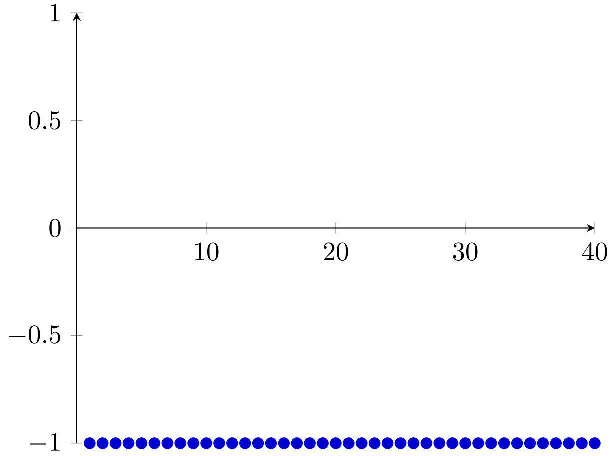
Należy przeprowadzić 40 iteracji wyrażenia 4 dla danych

1. $c = -2, x_0 = 1$
2. $c = -2, x_0 = 2$
3. $c = -2, x_0 = 1.99999999999999$
4. $c = -1, x_0 = 1$
5. $c = -1, x_0 = -1$
6. $c = -1, x_0 = 0.75$
7. $c = -1, x_0 = 0.25$

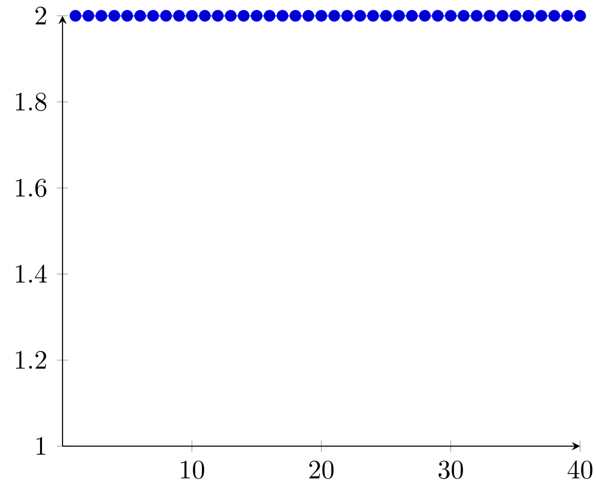
w arytmetyce `Float64`.

6.2 Rozwiązanie

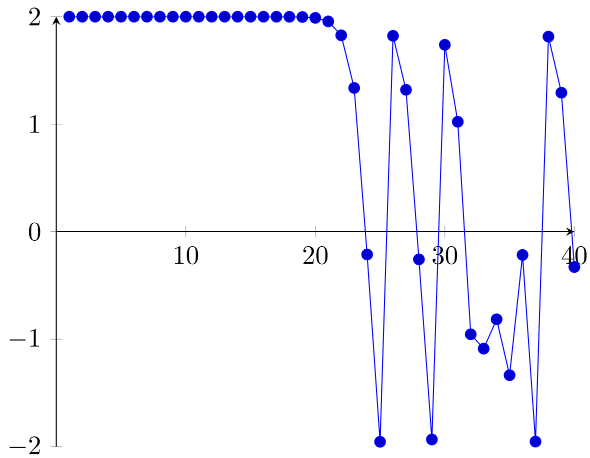
Plik `ex-6.jl` zawiera program, który oczekuje argumentu reprezentującego konkretny podpunkt zadania.



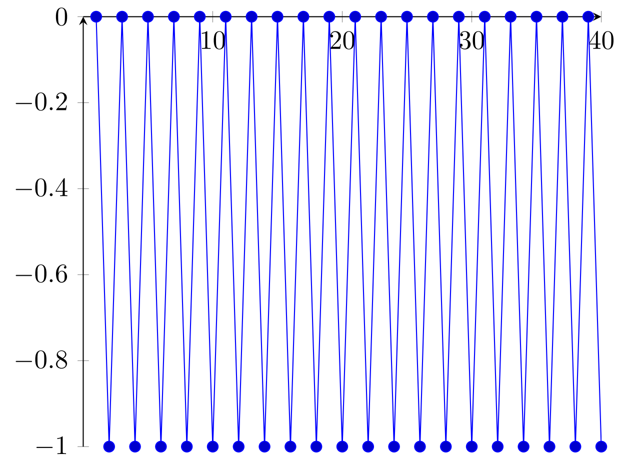
Rysunek 3: $c = -2, x_0 = 1$



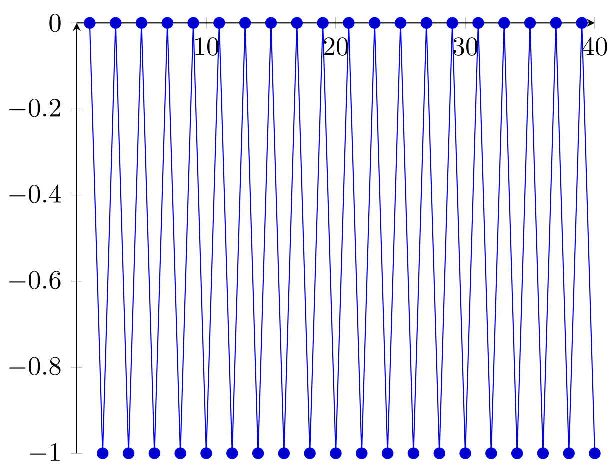
Rysunek 4: $c = -2, x_0 = 2$



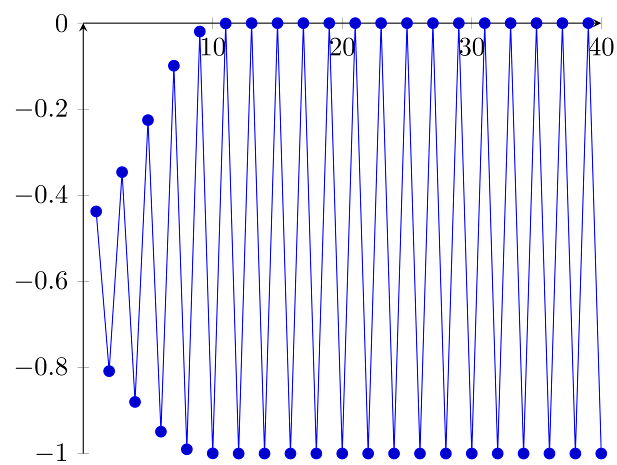
Rysunek 5: $c = -2, x_0 = 1.99999999999999$



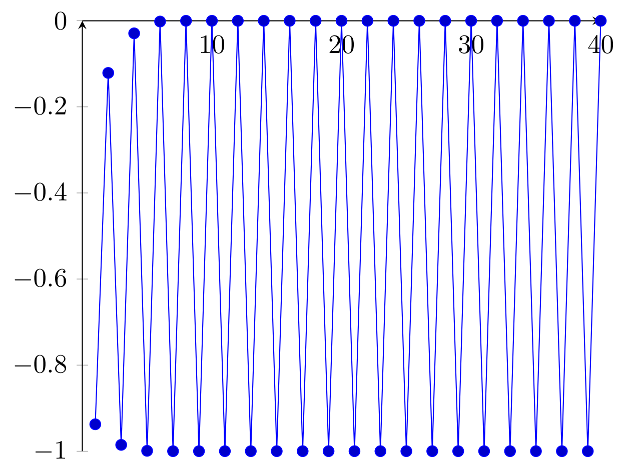
Rysunek 6: $c = -1, x_0 = 1$



Rysunek 7: $c = -1, x_0 = -1$



Rysunek 8: $c = -1, x_0 = 0.75$



Rysunek 9: $c = -1, x_0 = 0.25$

W przypadkach 1. i 2. ciąg zachowuje się stabilnie, ale już w przypadku 3. można zauważyć niestabilność spowodowaną lekkim odchyleniem pierwszego wyrazu ciągu.
Punkty 4. i 5. są przypadkami idealnego balansu funkcji migającej.
W przypadkach 6. i 7. mamy za to przejście od niestabilności do stabilnej funkcji migającej.

Powyższe eksperymenty po raz kolejny pokazują jak początkowo bardzo małe błędy mogą się kumulować i generować chaos numeryczny, który bardzo utrudnia analizę tego typów problemów.