Lista 8

Zadanie 5

---

1 Problem

Rozważamy graf skierowany G, w którym wszystkie krawędzie mają dodatnie wagi oprócz krawędzi wychodzących bezpośrednio z wierzchołka s gdzie mamy krawędzie o wagach ujemnych.

Czy algorytm Dijkstry zaczynający od s będzie działał poprawnie dla takiego grafu?

2 Concept

Rozważmy graf skierowany, w którym *wszystkie* krawędzie mogą mieć ujemne krawędzie. Wówczas, naiwne „naprawienie" algorytmu Dijkstry do wyszukiwania najkrótszej (najtańszej) drogi w takim grafie polegało by na dodaniu odpowiedniej liczby t do wag wszystkich krawędzi w grafie.

Oryginalny graf nazwijmy X, a zmienioną wersję X'. Niestety, po takiej modyfikacji mamy do czynienia z zupełnie innym grafem jako, że najkrótsza droga w grafie X' uległa zmianie. Rozważmy sytuację, w której mamy ścieżkę x, która jest najkrótszą drogą w grafie X oraz ścieżkę y, która nie jest najkrótszą drogą, ale wykorzystuje mniejszą liczbę krawędzi. Wówczas, po dodaniu wcześniej wspomnianej liczby t do wag wszystkich krawędzi do całkowitego kosztu ścieżki x dodajemy więcej wielokrotności liczby t niż do ścieżki y jako, że liczba krawędzi w ścieżce x jest większa niż liczba krawędzi w ścieżce y. Czyli najkrótsza ścieżka w grafie X może być już inna niż w grafie X'.

Teraz, rozważmy graf G z zadania. Wszystkie krawędzie mają dodatnie wagi poza tymi wychodzącymi z wierzchołka s. Stosujemy metodę podobną do powyższej, jednakże nie dodajemy pewnej liczby t do wag wszystkich krawędzi w grafie, a jedynie do wag tych krawędzi wychodzących z wierzchołka s. Wówczas, nie mamy sytuacji opisanej w poprzednim paragrafie, bo dla każdej możliwej najkrótszej ścieżki dodajemy tylko jeden raz liczbę t.

3 Rozwiązanie

Założenia:

1. Niech $c : E \to \mathbb{R}$ będzie pierwotną funkcją wagi krawędzi w grafie G. Definiujemy nową, zmodyfikowaną funkcję wagi $\hat{c} : E \to \mathbb{R}$ na grafie G.

2. Niech $\mathrm{fst} : E \to V$ będzie funkcją określającą początek krawędzi.

Dla każdej krawędzi $\hat{e}$ ze zbioru $A = \{\hat{e} \in E : \mathrm{fst}(\hat{e}) = s\}$ niech $\hat{c}(\hat{e}) = t + c(\hat{e})$ gdzie $t = |\min\{c(\hat{e}) : \hat{e} \in A\}|$. Dla pozostałych krawędzi ze zbioru $E \setminus A$ mamy $\hat{c}(e) = c(e)$.

Możemy myśleć o liczbie t jako dodatkowym „koszcie wyjazdu" z wierzchołka s.

Jako, że algorytm Dijkstry działa na każdym grafie o krawędziach z wagami dodatnimi to zadziała też w naszym grafie.