Lista 2, Zadanie 10

Problem

Mamy

$$x = (1001)_2$$
$$y = (1011)_2$$

Chcemy dostać $x \cdot y$ wykorzystując metodę *„divide and conquer"*.

Concept

Możemy podzielić liczby x oraz y na dwie części:

$$x = 2^{\frac{n}{2}} \cdot x_L + x_R$$
$$y = 2^{\frac{n}{2}} \cdot y_L + y_R$$

gdzie n to liczba bitów, a_L, a_R to lewa oraz prawa połowa część bitów liczby $a \in \{x, y\}$.

Wówczas mamy

$$x \cdot y = (2^{\frac{n}{2}} \cdot x_L + x_R) \cdot (2^{\frac{n}{2}} \cdot y_L + y_R) =$$
$$= 2^n \cdot x_L y_L + 2^{\frac{n}{2}} \cdot (x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R$$

Wiemy, że

$$x_L y_R = (x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R$$

więc będziemy wykonywać tylko 3 $\frac{n}{2}$-bitowe pod-problemy:

- $x_L y_L$

- $x_R y_R$
- $(x_L + x_R)(y_L + y_R)$

Rozwiązanie

$n = 4$

$$\begin{aligned} x = (1001)_2 = 2^{\frac{n}{2}} \cdot x_L + x_R = 2^2 \cdot (10)_2 + (01)_2 \\ y = (1011)_2 = 2^{\frac{n}{2}} \cdot y_L + y_R = 2^2 \cdot (10)_2 + (11)_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Part}_1 = x_L \cdot y_L = &\quad (10)_2 \cdot (10)_2 \\ \text{Part}_2 = x_R \cdot y_R = &\quad (01)_2 \cdot (11)_2 \\ \text{Part}_3 = (x_L + x_R) \cdot (y_L + y_R) = &\quad (11)_2 \cdot (101)_2 \end{aligned}$$

$$x \cdot y = \text{Part}_1 \cdot 2^4 + (\text{Part}_3 - \text{Part}_1 - \text{Part}_2) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + \text{Part}_2$$

Najpierw musimy rozwiązać jednak $\forall_{i=1,2,3}\ \text{Part}_i$.

Part_1:

Lokalne $n = 2$

$$\text{Part}_1 = (10)_2 \cdot (10)_2$$

Taka sama sytuacja, więc

$$\begin{aligned} x = 2^1 \cdot (1)_2 + (0)_2 \\ y = 2^1 \cdot (1)_2 + (0)_2 \end{aligned}$$

Tutaj mamy do czynienia z liczbami jedno-bitowymi, więc możemy już mnożyć:

$$\begin{aligned}\mathrm{Part}_{1,1} &= (1)_2 \cdot (1)_2 = (1)_2 \\ \mathrm{Part}_{1,2} &= (0)_2 \cdot (0)_2 = (0)_2 \\ \mathrm{Part}_{1,3} &= (1)_2 \cdot (1)_2 = (1)_2\end{aligned}$$

Więc

$$\mathrm{Part}_1 = \mathrm{Part}_{1,1} \cdot 2^2 + (\mathrm{Part}_{1,3} - \mathrm{Part}_{1,1} - \mathrm{Part}_{1,2}) \cdot 2^1 + \mathrm{Part}_{1,2} = \\ = 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = 2^2 = (100)_2$$

Part_2 oraz Part_3

Analogicznie do Part_1.

W przypadku Part_3 mamy do czynienia z nieparzystą liczbą bitów. Wówczas bierzemy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ bądź $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gdzie $n = \max\{\mathrm{sizeof}(x), \mathrm{sizeof}(y)\}$ przy dzieleniu liczb na części R oraz L. Liczby x, y tutaj to oczywiście $(11)_2$ oraz $(101)_2$ które się pojawiają w Part_3.

Scalanie rozwiązania

Mamy $\mathrm{Part}_1 = (100)_2, \mathrm{Part}_2 = (11)_2, \mathrm{Part}_3 = (1111)_2$.

Zatem

$$x \cdot y = 2^4 \cdot (100)_2 + (1111_2 - 100_2 - 11_2) \cdot 2^2 + (11)_2 = \\ = 2^4 \cdot (100)_2 + 2^2 \cdot (1000)_2 + (11)_2 = \\ = (1100011)_2.$$